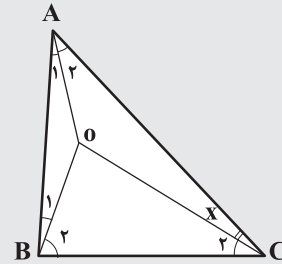


پاسخ پرسش‌های پیکار جو ؟

۱. گزینه ه. با توجه به فرض داریم:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 15^\circ \Rightarrow OA = OB = 1, \hat{A}_r = 30^\circ, \hat{B}_r = 75^\circ$$



حال با توجه به قضیه سینوس‌ها در دو مثلث OBC و OAC

می‌نویسیم:

$$\Delta OAC: \frac{OA}{\sin x} = \frac{OC}{\sin A_r} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{\sin x}{\sin 30^\circ} = 2 \sin x$$

$$\Delta OBC: \frac{OC}{\sin B_r} = \frac{OB}{\sin(45-x)} \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{\sin(45-x)}{\sin 75^\circ}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x = \frac{\sin(45-x)}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \sin x = \sin(45-x)$$

$$\Rightarrow \sin 45 \cos x - \cos 45 \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cos x = (\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \sin x$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = 15^\circ$$

۲. گزینه الف. می‌دانیم برای هر x , $x-1 < [x] \leq x$. پس داریم:

$3 \leq x^2 - x < 1-x$ و در نتیجه: $3 \leq x^2 - x < 2$. با رسم نمودار تابع

$f(x) = x^2 - x$ متوجه می‌شویم که این تابع به ازای $x=1$ مساوی

صفر شده و به ازای $x > 1$ یک تابع همواره صعودی است. در

نتیجه با توجه به اینکه: $f(2) = 6$ ، پس اگر: $2 < f(x) \leq 3$ ، آن‌گاه:

$1 < x < 2$ و $[x] = 1$ و از آنجا: $x^2 = 4$ و $x = \sqrt{4}$ تنها ریشه این

معادله است.

۳. گزینه ج. با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a = \overline{mn} = 9q + r, 0 \leq r < 9 \\ b = \overline{pn} = 9r + q, 0 \leq q < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10m + n = 9q + r \\ 10p + n = 9r + q \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10(p-m) = 8(r-q) \Rightarrow 5(p-m) = 4(r-q)$$

و چون: $0 < p-m < 8$ و $0 < r-q < 8$ ، پس: $p-m=4$ و $r-q=5$

و از آنجا برای r و q (با فرض $r > q$) سه جفت جواب قابل قبول

$(6, 1)$ ، $(7, 2)$ و $(8, 3)$ به دست می‌آید که به یافتن سه جفت جواب

$(15, 55)$ ، $(25, 65)$ و $(35, 75)$ برای (a, b) منجر می‌شود.

